

# **EINFÜHRUNG IN DIE VEKTORRECHNUNG**

**Entwurf und Erprobung eines Stationenbetriebs**

**Gottfried Kendl**

**Akademisches Gymnasium Wien**

Wien 2003

# INHALTSVERZEICHNIS

|                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ABSTRACT .....</b>                                             | <b>3</b>  |
| <b>1     EINLEITUNG .....</b>                                     | <b>3</b>  |
| <b>2     DAS VORHABEN .....</b>                                   | <b>4</b>  |
| <b>3     PLANUNG UND VORBEREITUNG.....</b>                        | <b>6</b>  |
| <b>4     DURCHFÜHRUNG UND AUSWERTUNG .....</b>                    | <b>9</b>  |
| 4.1   Eindrücke und Beobachtungen beim Ablauf .....               | 9         |
| 4.2   Die einzelnen Stationen aus Sicht der SchülerInnen .....    | 10        |
| 4.3   Beurteilung des Stationenbetriebs als Unterrichtsform ..... | 12        |
| 4.4   Inwieweit wurden die Ziele erreicht? .....                  | 13        |
| <b>5     SCHLUSSBEMERKUNGEN .....</b>                             | <b>16</b> |
| <b>ANHANG A: DIE STATIONEN 3 UND 11.....</b>                      | <b>17</b> |
| <b>ANHANG B: WEGE DURCH DEN STATIONENBETRIEB .....</b>            | <b>26</b> |
| <b>ANHANG C: FRAGEBOGEN .....</b>                                 | <b>27</b> |
| <b>ABBILDUNGEN UND TABELLEN .....</b>                             | <b>29</b> |
| <b>LITERATUR .....</b>                                            | <b>30</b> |

# ABSTRACT

*Eine 5. Klasse des Akademischen Gymnasiums in Wien, die keine Erfahrungen mit offenen Lernformen hatte, erarbeitete die Grundbegriffe der Vektorrechnung in einem Stationenbetrieb. Insgesamt 18 Stationen vermittelten nicht nur die geometrischen, sondern auch algebraische und physikalische Aspekte des Vektorbegriffs. Neben der Konzeption wird die Durchführung beschrieben, Beobachtungen des Lehrers und Rückmeldungen der SchülerInnen ermöglichen eine Bewertung der einzelnen Stationen so wie des Stationenbetriebs als Unterrichtsform.*

## 1 EINLEITUNG

Die Schülerinnen und Schüler der 5.B des Akademischen Gymnasiums in Wien sind intensiv beschäftigt: Eine Gruppe sitzt bei einem Brettspiel, würfelt reihum und zieht mit Spielsteinen; eine andere erzeugt mit gespannten Gummiringen Figuren auf einem Nagelbrett; eine weitere Gruppe hantiert mit Federwaagen; ein Schüler verändert eine geometrische Konstruktion auf einem Computerbildschirm und macht dabei Notizen; eine Schülerin schreibt etwas auf einen Zettel, während ihre Partnerin mit einer Stoppuhr in der Hand aufmerksam zusieht.



Abbildung 1: Geometrie auf dem Nagelbrett



Abbildung 2: Gruppenarbeit

Neun Unterrichtsstunden lang hatten die SchülerInnen – und der Lehrer – die Gelegenheit, Erfahrungen mit einer für sie neuen Unterrichtsform zu sammeln. Das inhaltliche Ziel war, ein Verständnis für den Begriff des Vektors zu vermitteln, das von möglichst vielfältigen Anwendungssituationen geprägt ist, so wie die Fähigkeit, einfache Aufgaben aus diesen Anwendungsbereichen zu lösen. Das methodische Ziel war die Verstärkung jener Kompetenzen, die für den selbsttätigen Erwerb von Kenntnissen und Fertigkeiten so wie für die

Zusammenarbeit in einer Gruppe notwendig sind.

- Wie war der Stationenbetrieb konzipiert, wie ist er abgelaufen?
- Inwieweit wurden die gesetzten Ziele erreicht?
- Wie ist es den SchülerInnen dabei ergangen und wie dem Lehrer?

## 2 DAS VORHABEN

Die Idee zu diesem Stationenbetrieb und einige der Stationen entstanden im Lehrerfortbildungsseminar „*Mathematikunterricht heute*“ des Unterrichtsministeriums, das im Schuljahr 2000/2001 unter der Leitung von *Gerhard Hainscho* in Ossiach stattfand. Schwerpunkte des Seminars waren offene Lernformen sowie der Computereinsatz im Mathematikunterricht.

Schon die Urfassung des Stationenbetriebs, die von der Arbeitsgruppe mit den TeilnehmerInnen *Anni Graßl*, *Karin Rott*, *Dieter Pflüger* und *Gottfried Kendl* ausgearbeitet wurde, thematisierte unterschiedliche Aspekte des Vektorbegriffs:

| Nr. | AutorIn         | Titel                             | Thema                                         |
|-----|-----------------|-----------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1   | Dieter Pflüger  | Häschen hüpf!                     | Addition auf der Zahlengeraden                |
| 2   | Gottfried Kendl | Nägel, Gummi, graue Zellen        | Parallelverschiebung und zentrische Streckung |
| 3   | Karin Rott      | Kräfte messen                     | Kräfteparallelogramm                          |
| 4   |                 | Flussüberfahrt                    | Überlagerung von Bewegungen                   |
| 5   |                 | Autorallye                        | Geschwindigkeit und Beschleunigung            |
| 6   | Anni Graßl      | Triff mit dem Pfeil ins Schwarze! | Punkte und Pfeile bzw. Pfeilklassen           |
| 7   |                 | Punkten auf der Spur              |                                               |

**Tabelle 1: Urfassung des Stationenbetriebs**

Diese Idee eines „breiten Zugangs“ stand auch beim weiteren Ausbau des Stationenbetriebs im Rahmen von IMST<sup>2</sup>/S3 im Vordergrund. Der Vektorbegriff sollte nicht frühzeitig durch eine formale Definition eingeengt werden, die SchülerInnen sollten vielmehr Erfahrungen mit vielen verschiedenen Facetten und Anwendungsmöglichkeiten sammeln und dabei die Vektorschreibweise als praktisches Darstellungsmittel kennen lernen.

Die folgenden Aspekte sollten behandelt werden:

- **algebraisch:** Rechnen mit  $n$ -Tupeln (Addition, Multiplikation mit einer reellen Zahl)
- **geometrisch:** Punkte und Pfeile in der Ebene
- **physikalisch:** Kräfte, Geschwindigkeiten

(Raumgeometrie und Skalarprodukt waren nicht vorgesehen.)

Damit sich die mathematischen Tätigkeiten der SchülerInnen nicht im Berechnen und Konstruieren erschöpfen, sollten auch anspruchsvollere Aktivitäten wie Entdecken von Gesetzmäßigkeiten, Argumentieren oder Problemlösen eingebunden werden. Außerdem sollten die Stationen so konzipiert sein, dass sie ohne Hilfe des Lehrers bewältigt werden können. Dadurch sollten auch allgemeine Kompetenzen der SchülerInnen geübt und weiter entwickelt werden, wie etwa die selbständige Auseinandersetzung mit Informationstexten und schriftlichen Anleitungen oder die Selbstorganisation in einer Arbeitsgruppe.

Der Stationenbetrieb sollte aber nicht nur die Reichhaltigkeit und Anwendbarkeit mathematischer Begriffe und Methoden zeigen und den SchülerInnen spezifische Kenntnisse und Fertigkeiten vermitteln, die Arbeit an den einzelnen Stationen sollte auch Vergnügen bereiten.

Da diese Unterrichtsform sowohl für mich als auch für die SchülerInnen neu war, wollte ich bei der Erprobung des Stationenbetriebs Daten sammeln, die eine Bewertung des Stationenbetriebs ermöglichen und Ansatzpunkte für eine spätere Überarbeitung sein könnten. Mich interessierte unter anderem,

- welche Informationen oder Hilfestellungen die SchülerInnen verlangten,
- welche Aufgaben ihnen schwer fielen, wie sie mit Schwierigkeiten umgingen,
- welche Stationen sie interessant / uninteressant fanden, welche Lernziele erreicht wurden,
- ob die einzelnen Stationen zweckmäßig gestaltet waren (Verständlichkeit, Schwierigkeitsgrad, Umfang),
- ob organisatorische Probleme auftraten.

### 3 PLANUNG UND VORBEREITUNG

Durch Überarbeitung und Erweiterung der Urfassung erstellte ich insgesamt 18 Stationen, die in der folgenden Tabelle kurz beschrieben werden:

| <i>Nr.</i> | <i>Titel</i>                     | <i>Material</i>                   | <i>Inhalt</i>                                                                                               |
|------------|----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1          | Känguru                          | Schnur, Würfel                    | Addition auf der Zahlengeraden                                                                              |
| 2          | Drei raus!                       | Brettspiel                        | Beschreibung der Spielzüge mit Vektoren                                                                     |
| 3          | Nägel, Gummi, graue Zellen I, II | Nagelbrett, Gummiringe            | Parallelverschiebung von Dreiecken                                                                          |
| 4          |                                  |                                   | Zentrische Streckung von Dreiecken                                                                          |
| 5          | Autorallye                       | Spielplan, Buntstifte             | Strategiespiel: Geschwindigkeit und Beschleunigung                                                          |
| 6          | Flussüberfahrt                   | Stöpselkasten                     | Überlagerung von Bewegungen                                                                                 |
| 7          | Kräfte messen                    | Federwaagen                       | Kräfteparallelogramm                                                                                        |
| 8          | Punkte und Pfeile                | Computer: Cabri géomètre          | Zusammenfassen der Grundkenntnisse und Übungen                                                              |
| 9          | Pfeile I                         |                                   |                                                                                                             |
| 10         | Pfeile II                        |                                   |                                                                                                             |
| 11         | Sei sparsam und schnell!         | Aufgabenkärtchen, Stoppuhr        | Wettbewerb: Rechnen mit n-Tupeln als abgekürzte Schreibweise für mehrere gleichartige Rechnungen mit Zahlen |
| 12         | Punkten auf der Spur             | Aufgabenkärtchen                  | Berechnung von Punkten in geometrischen Figuren                                                             |
| 13         | Kleine Ursache – große Wirkung   | Arbeitsblatt                      | Zerlegung von Kräften                                                                                       |
| 14         | Verlier nicht das Gleichgewicht! | Stab mit Skala, Dreieck, Gewichte | Experimente: Teilungspunkte als Schwerpunkte; Berechnungen                                                  |
| 15         | Das merkwürdige Viereck          | Computer: Cabri géomètre          | Entdecken und Beweisen eines geometrischen Satzes                                                           |
| 16         | Beweispuzzle                     | Puzzleteile                       | Ordnen von Beweisschritten: Rechengesetze für n-Tupel                                                       |
| 17         | Chemische Reaktionen             | Aufgabenkärtchen                  | Aufstellen von Reaktionsgleichungen mit Hilfe von n-Tupeln                                                  |
| 18         | Kunstdiebstahl in Manhattan      | Brettspiel mit Fragekärtchen      | Wiederholung und Übung                                                                                      |

**Tabelle 2: Stationenverzeichnis**

Die Stationen 11, 16 und 17 behandeln den algebraischen Aspekt des Vektorbegriffs, die Stationen 5, 6, 7, 13 und 14 den physikalischen, die Stationen 1-4, 8-10, 12 und 15 den geometrischen, die Station 18 enthält Aufgaben zu allen behandelten Aspekten.

Durch eine abwechslungsreiche Gestaltung, was die verwendeten Lernmittel und die Arbeitsformen betrifft, hoffte ich, dass die Arbeit an den einzelnen Stationen für die SchülerInnen motivierend sein würde: Durch entdeckendes Lernen mit „handfesten“ Materialien (Station 3, 4, 7 und 14), mit dynamischer Geometrie-Software (8, 9, 10 und 15), spielerische Elemente (1, 2, 5, 11 und 18) sowie besondere Möglichkeiten der Selbstkontrolle (6 und 16) unterscheidet sich der Stationenbetrieb deutlich vom Normalunterricht. Als Beispiele werden die Stationen 3 und 11 im Anhang A genauer dargestellt.

Die Unterrichtssequenz sollte in sechs Stunden durchgeführt werden, von denen einige zu Doppelstunden zusammengelegt wurden. Dazu kamen noch eine Vor- und eine Nachbesprechung. Es war nicht vorgesehen, dass die SchülerInnen alle Stationen bearbeiten. Fünf Stationen waren allerdings verpflichtend, sie enthielten sozusagen den „Kernstoff“; aus weiteren fünf Wahlpflichtstationen sollten drei ausgewählt werden, von den übrigen Stationen mindestens zwei, insgesamt also zehn Stationen; der Einstieg war bei sechs Stationen möglich. (Details können dem Diagramm „Wege durch den Stationenbetrieb“ im Anhang B entnommen werden.) Ich ging dabei von der Annahme aus, dass pro Stunde durchschnittlich zwei Stationen bearbeitet würden.

Als Begleitmaterial erhielten alle SchülerInnen eine Mappe mit folgenden Unterlagen:

- Hinweise zu Organisation und Ablauf
- Verzeichnis der Stationen (Titel, Typ, Sozialform, Inhalt)
- Wege durch den Stationenbetrieb
- Angaben der Hausübungen (Aufgaben aus dem Lehrbuch)
- Protokollformular für die Eintragung der absolvierten Stationen und der Namen der jeweils beteiligten MitschülerInnen.

In dieser Projektmappe sollte auch die Arbeit an den einzelnen Stationen dokumentiert werden.

Bei der Vorbereitung war noch zu berücksichtigen, dass die Stationen nicht während des gesamten Zeitraums der Durchführung aufgestellt bleiben konnten. Wegen des Platzbedarfs und der für vier Stationen benötigten Computer kam nur der Informatikraum in Frage, die Stationen mussten daher vor den einzelnen Unterrichtseinheiten aufgebaut und danach wieder entfernt werden.

Als Datenquellen für eine Bewertung des Stationenbetriebs wollte ich neben meinen Beobachtungen während der Durchführung die Meinungsäußerungen von SchülerInnen in informellen Gesprächen und bei der Nachbesprechung in der Klasse heranziehen. Auch aus den schriftlichen Dokumentationen der SchülerInnen erwartete ich wertvolle Hinweise zu erhalten. Zur systematischeren Untersuchung bat ich die

SchülerInnen bei jeder Station um ein kurzes schriftliches Feedback (siehe Formular 1); nach Abschluss des Stationenbetriebs legte ich ihnen einen umfangreicheren Fragebogen vor (siehe Anhang C), der anonym ausgefüllt werden sollte. Über einige Details aus diesen schriftlichen Rückmeldungen und meine Eindrücke während der Durchführung des Stationenbetriebs möchte ich nun genauer berichten.

**Station Nr. \_\_\_\_\_**

(Name)

1. Bitte ankreuzen:

|                                     |        |             |         |             |        |
|-------------------------------------|--------|-------------|---------|-------------|--------|
| <i>Zeitaufwand<br/>(in Minuten)</i> | < 10   | 10 – 15     | 15 – 20 | 20 – 30     | > 30   |
|                                     |        |             |         |             |        |
| <i>Schwierigkeits-<br/>grad</i>     | leicht | eher leicht | mittel  | eher schwer | schwer |
|                                     |        |             |         |             |        |

2. Falls Schwierigkeiten aufgetreten sind:

- Gib sie bitte möglichst konkret an:
  
- Wie hast du sie bewältigt?

3. Weitere Bemerkungen:

**Formular 1: Feedback zu den Stationen**



## 4 DURCHFÜHRUNG UND AUSWERTUNG

### 4.1 Eindrücke und Beobachtungen beim Ablauf

Neugierde und Interesse, vereinzelt aber auch Skepsis und Unsicherheit spürte ich bei den SchülerInnen am Beginn der ersten Unterrichtseinheit. Einerseits waren sie gespannt darauf, was sie bei den einzelnen Stationen erwarten würde, andererseits waren sie in einer ungewohnten Situation: Sie mussten sich zuerst einmal entscheiden, mit wem und bei welcher Station sie beginnen wollten – und dann auch noch eine Anleitung lesen!

Wenn sich jemand nicht entscheiden konnte (oder wollte) und wenn nach dem raschen Überfliegen des Anleitungstexts nicht sofort alles klar war, wurde ich umgehend zu Hilfe gerufen. Für die SchülerInnen gehört es offenbar zum Rollenbild des Lehrers, dass er alleine die Verantwortung für den reibungslosen Ablauf des Unterrichtsgeschehens trägt und jederzeit für Erklärungen zur Verfügung steht. In den meisten Fällen erfüllte ich die Erwartungen der SchülerInnen nicht: Ich forderte sie vielmehr dazu auf, die Informationstexte noch einmal genau zu lesen. Nur bei sehr konkreten Fragen, die einen tatsächlichen Erklärungsbedarf erkennen ließen, war ich zu Auskünften und Erklärungen bereit.

Die SchülerInnen gewöhnten sich im weiteren Verlauf immer mehr an das selbständige Arbeiten und holten mich nur dann zu Hilfe, wenn sie trotz genauen Studiums der Texte und gemeinsamer Lösungsversuche nicht weiter kamen. Sie arbeiteten meist sehr konzentriert, der Umgang mit verschiedenen Materialien und die spielerischen Elemente bereiteten ihnen sichtlich Vergnügen.

Bei einigen Stationen (vor allem 4, 9 und 10) ging die Arbeit allerdings eher zäh voran. Die ursprüngliche Annahme, in einer Stunde könnten durchschnittlich zwei Stationen bewältigt werden, stellte sich als zu optimistisch heraus. Manche SchülerInnen mussten dann Wartezeiten in Kauf nehmen, bis die gewünschte Station frei war. Stationen wurden von den SchülerInnen manchmal nicht frei gegeben, obwohl sie nur mehr an der Dokumentation arbeiten und die Materialien nicht mehr benötigten; Spiele wurden oft mehrmals wiederholt. Als dieses Zeitproblem nach der Anfangsphase erkennbar wurde, führte ich als neue Regel einen Stationenwechsel nach jeweils 25 Minuten ein. Außerdem stellte ich eine zusätzliche Unterrichtsstunde für den Stationenbetrieb zur Verfügung, damit auch die langsameren SchülerInnen zehn Stationen absolvieren konnten; versäumte Stunden konnten an einem Nachmittag nachgeholt werden.

Was die Inhalte betrifft, so waren bei den Aufgaben zum algebraischen Aspekt des Vektorbegriffs keine Schwierigkeiten zu beobachten, wohl aber bei einigen geometrischen und physikalischen Anwendungen. Bei der Beschreibung einer zentrischen Streckung durch Vektoren (Station 4) und bei der Vektoraddition in Pfeildarstellung (Station 9) sollten jeweils die Koordinaten von Pfeilen abgelesen werden; manche SchülerInnen gaben vier Zahlen an – die Koordinaten von Anfangs- und Endpunkt – der Begriff „Koordinaten“ war für sie anscheinend untrennbar mit Punkten verbunden. Hier musste ich mit einer Erklärung helfend eingreifen. Bei der Station 6, „Flussüber-

fahrt“, waren die Strömungsgeschwindigkeit und die resultierende Geschwindigkeit gegeben und die Eigengeschwindigkeit des Bootes gesucht; die SchülerInnen fanden intuitiv jeweils die richtige Auswahlantwort, waren dann aber oft nicht imstande, die resultierende Geschwindigkeit aus den beiden Komponenten zu konstruieren.

## 4.2 Die einzelnen Stationen aus Sicht der SchülerInnen

Die Auswertung des Fragebogens (Anhang C, Fragen 1 und 2) zeigt deutliche Unterschiede zwischen den Stationen. Die SchülerInnen sollten jene drei Stationen nennen, die ihnen am besten bzw. am wenigsten gefallen haben. Das folgende Diagramm zeigt für jede Station, wie oft sie jeweils genannt wurde.

(Bei den Statistiken berücksichtige ich nur die ersten zwölf Stationen, da die übrigen – nicht verpflichtenden – von zu wenigen SchülerInnen bearbeitet wurden, um relevante Vergleiche zu ermöglichen. Insgesamt wurden 17 Fragebögen abgegeben.)

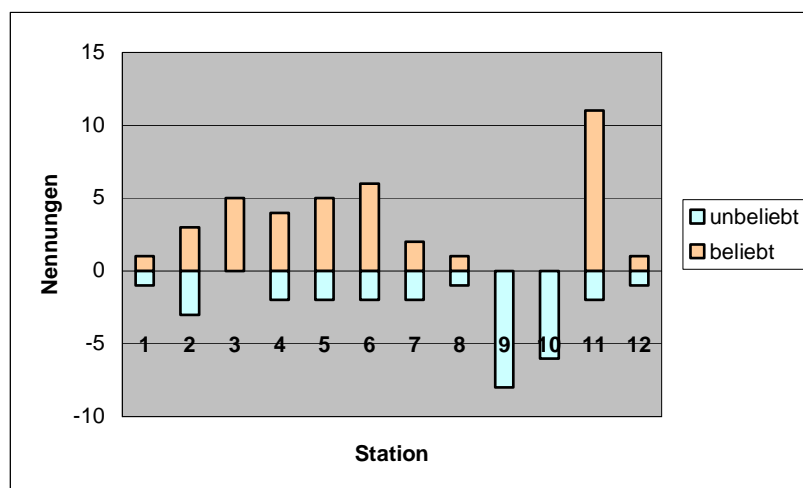


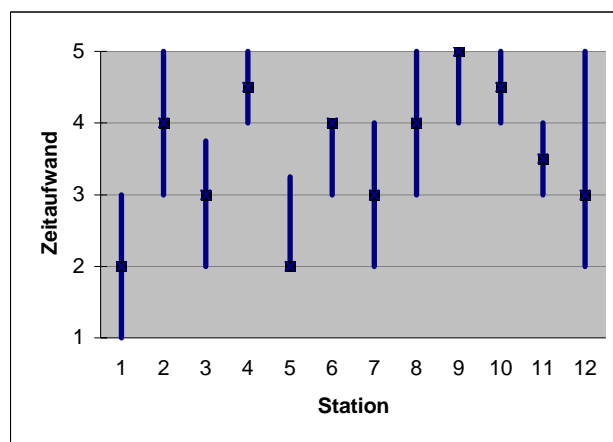
Abbildung 3: Beliebtheit der Stationen

Am beliebtesten war eindeutig die Station 11, auch die Stationen 3, 5 und 6 erhielten viele positive Nennungen; die Stationen 9 und 10 wurden am schlechtesten bewertet. Die Begründungen im Fragebogen sowie die schriftlichen Rückmeldungen bei den einzelnen Stationen zeigen, dass für die Bewertung sowohl Inhalt und Arbeitsform als auch Verständlichkeit, Schwierigkeitsgrad und Zeitaufwand Ausschlag gebend waren. So haben die Stationen 3 und 6 Anwendungen zum Inhalt, 5 und 11 ermöglichen eine spielerische Betätigung, 3 und 11 werden als leicht eingestuft. Die Stationen 9 und 10 hingegen haben keine Anwendungen zum Inhalt, sondern eine systematische – vielleicht „trockene“ – Darstellung des Umgangs mit Pfeilen, die Aufgabenstellungen werden als unklar bzw. schwierig eingestuft, der Zeitaufwand war zu hoch. Höherer Schwierigkeitsgrad und Zeitaufwand allein führen nicht zu einer negativen Bewertung, wie man an der Station 4 erkennen kann.

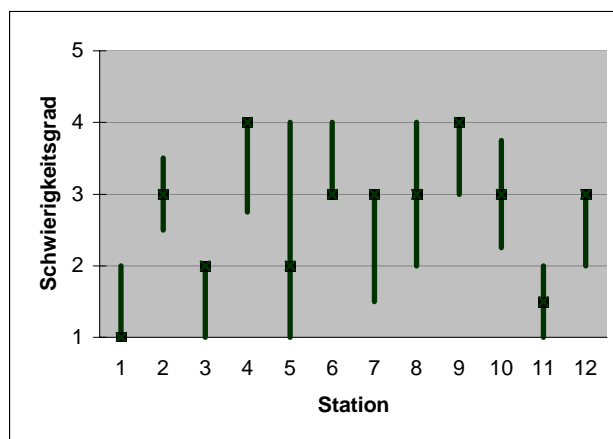
Die nächsten beiden Diagramme stellen dar, wie Zeitaufwand und Schwierigkeitsgrad der einzelnen Stationen eingeschätzt wurden. Die Zahlen auf der senkrechten Achse haben dabei folgende Bedeutung:

|                    | 1      | 2           | 3       | 4           | 5      |
|--------------------|--------|-------------|---------|-------------|--------|
| Zeitaufwand (min)  | < 10   | 10 - 15     | 15 - 20 | 20 - 30     | > 30   |
| Schwierigkeitsgrad | leicht | eher leicht | mittel  | eher schwer | schwer |

**Tabelle 3: Skalen für Zeitaufwand und Schwierigkeitsgrad**



**Abbildung 4: Zeitaufwand für die Stationen**



**Abbildung 5: Schwierigkeitsgrad der Stationen**

Die Quadrate markieren den Median, die senkrechten Strecken den Bereich vom ersten bis zum dritten Quartil. Man erkennt, dass die Bearbeitung der Stationen 4, 9 und 10 zu lange dauert und dass die Stationen 4 und 9 als eher schwierig empfunden werden. Diese Stationen sollten daher in Hinsicht auf die Anzahl, Verständlich-

keit und Komplexität der Aufgabenstellungen neu überdacht werden. Das würde auch das oben beschriebene Zeitproblem entschärfen.

### 4.3 Beurteilung des Stationenbetriebs als Unterrichtsform

Auf den ersten Blick sind die Antworten auf die Frage „Glaubst du, dass du den Lehrstoff im Stationenbetrieb besser als / gleich gut wie / schlechter als im „Normalunterricht“ gelernt hast?“ ernüchternd:

| besser | gleich | schlechter |
|--------|--------|------------|
| 2      | 3      | 11         |

Tabelle 4: Lernerfolg im Vergleich zum Normalunterricht

Als Gründe für die Antwort „schlechter“ werden unter anderen genannt:

*Im Normalunterricht wird einem das Thema erklärt, im Stationenbetrieb muss man auf alles selber draufkommen.*

*Weil eher eine Aufgabe gestellt wurde, als dass Lösungswege, Definitionen, Regeln usw. gesagt wurden.*

*Weil die Aufgaben ohne Vorkenntnisse gerechnet werden müssen.*

*Man kann auch auf Falsches draufkommen.*

Wenn „den Lehrstoff gelernt haben“ mit der bloßen Kenntnis von Lösungswegen, Definitionen und Regeln gleichgesetzt wird, dann ist ein Stationenbetrieb natürlich nicht die ökonomischste Unterrichtsform. Wenn aber die aktive Rekonstruktion von Wissen, die selbständige Auseinandersetzung mit Problemen etc. als unverzichtbare Bestandteile des Lernprozesses angesehen werden, dann wird man sich dieser Beurteilung durch die SchülerInnen nicht anschließen können und die beiden erstgenannten Merkmale als Pluspunkte des Stationenbetriebs werten. Die SchülerInnen haben auch im Normalunterricht häufig die Gelegenheit, Lösungswege selber zu finden, die Mathematik wird nicht als fertiges Produkt präsentiert; bei der Vorbesprechung des Stationenbetriebs habe ich darauf hingewiesen, dass es gerade bei dieser Unterrichtsform nicht nur um die „Ergebnisse“ geht. Aus den Antworten erkennt man aber, wie schwer es ist, das Bild zu verändern, das die SchülerInnen von der Mathematik und vom Lernen haben und das ja im Schulbetrieb oft verstärkt wird.

Dass die SchülerInnen den Stationenbetrieb durchaus differenziert sehen und auch sehr unterschiedliche Meinungen vertreten, zeigen die Antworten auf die Frage nach den Vor- und Nachteilen dieser Unterrichtsform. (Die Antworten in einer Zeile stammen von verschiedenen SchülerInnen; ähnliche Antworten werden nur einmal angeführt.)

| Vorteile                              | Nachteile                                                                 |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| <i>viel Spaß</i>                      | <i>nicht sehr ernstes lernen (?)</i>                                      |
| <i>nicht langweilig</i>               | <i>Zeitdruck</i>                                                          |
| <i>abwechslungsreich</i>              | <i>zu hoher Zeitaufwand</i>                                               |
| <i>Unterricht ist lockerer</i>        | <i>zu viel in zu kurzer Zeit</i>                                          |
| <i>freieres Arbeiten</i>              | <i>zu wenig Kontrolle</i>                                                 |
| <i>individuell</i>                    | <i>Wartezeiten</i>                                                        |
| <i>Auswahlmöglichkeit</i>             | <i>keine ausführlichen Erklärungen, nur Tipps</i>                         |
| <i>man eignet sich viel selber an</i> | <i>man kann auch auf Falsches draufkommen</i>                             |
| <i>man <u>muss</u> selber denken</i>  | <i>manche Fragen ungeklärt</i>                                            |
| <i>man passt mehr auf</i>             | <i>wenn man den Stoff nicht von Anfang an kann, dann kann man ihn nie</i> |
| <i>Selbständigkeit</i>                | <i>wenn man mit jemandem arbeitet, der es kann, dann schreibt man ab</i>  |
| <i>man lernt Zeiteinteilung</i>       |                                                                           |
| <i>Zusammenarbeit mit Mitschülern</i> |                                                                           |

**Tabelle 5: Vor- und Nachteile des Stationenbetriebs**

Diese Äußerungen spiegeln die zwei Seiten eigenständigen, „ganzheitlichen“ Lernens wider: Einerseits gibt es viel Raum für eigene Entscheidungen, man kann Spannendes erleben, andererseits ist es zeitaufwändig, anstrengend und verunsichert manchmal, weil die gewohnte Systematik fehlt.

Für etwas mehr als die Hälfte der SchülerInnen überwiegen anscheinend die Vorteile. Das könnte man aus den Antworten auf die Frage schließen, ob sie noch einmal – zu einem anderen Thema – in einem Stationenbetrieb arbeiten möchten:

| auf keinen Fall | nicht so gerne | ganz gerne | jederzeit |
|-----------------|----------------|------------|-----------|
| 4               | 3              | 6          | 4         |

**Tabelle 6: Bereitschaft zu einem weiteren Stationenbetrieb**

## 4.4 Inwieweit wurden die Ziele erreicht?

Aus den Beobachtungen, den schriftlichen Dokumentationen der SchülerInnen, der Auswertung des Fragebogens und den anschließenden „normalen“ Mathematikstunden ergeben sich folgende Erkenntnisse:

In den Informationstexten und Aufgaben der einzelnen Stationen wurden unter anderem die folgenden Aspekte des Vektorbegriffs vermittelt:

- gerichtete Größe, d.h. Größe, die Betrag und „Richtung“ (= Richtung und Orientierung) hat, z.B.: Geschwindigkeit, Kraft
- Pfeilklassse (parallel, gleich lang, gleich orientiert)
- Koordinaten von Punkten und Pfeilen (mit geometrischer Deutung der Rechenoperationen)
- $n$ -Tupel (mit Addition und Multiplikation mit einer reellen Zahl)

Die SchülerInnen haben mit den verschiedenen Deutungen und Anwendungen des Vektorbegriffs gearbeitet, kennen sie also und können mit ihnen arbeiten. Konnten sie diese Kenntnisse auch verbal ausdrücken?

Es war zwar realistischweise nicht zu erwarten, dass sie auf die explizite Frage, was ein Vektor ist, etwa mit *„ein Objekt, das durch mehrere Zahlen festgelegt wird, mit dem man nach bestimmten Regeln rechnen kann, das als Punkt oder Pfeil dargestellt werden kann“* antworten würden; ich hoffte allerdings, dass in den einzelnen Antworten jeweils mehr als einer der obigen Aspekte genannt werden würde.

Von 17 Antworten enthielten aber 12 nur einen Aspekt, und zwar:

- 9 Mal: „gerichtete Größe“, teilweise näher erklärt oder mit einem Beispiel versehen:

*z.B.: Eine Geschwindigkeit ist ein Vektor, weil es eine gerichtete Größe ist.*

*Ein Vektor ist eine gerichtete Größe, die einen Betrag und eine Richtung hat.*

- 2 Mal: „Pfeil“
- 1 Mal: „ $n$ -Tupel“:

*Ein Paar, Tripel und Quadrupel mit Zahlen wurden mit Hilfe von Klammern zu einem  $n$ -Tupel zusammengefasst. Ein solches  $n$ -Tupel nennt man Vektor.*

5 Antworten enthielten zwei Aspekte:

- 4 Mal: „gerichtete Größe“ und „Pfeil“, z.B.:

*Ein Vektor ist eine gerichtete Größe (wird ausgedrückt durch Pfeile. Die Länge eines Pfeils ist gleich dem Betrag des dazugehörigen Vektors.)*

*Vektor ist eine Größe, die durch Betrag und Richtung bestimmt ist und daher durch eine gerichtete Strecke (Pfeil) dargestellt wird (auch in Physik)*

- 1 Mal: „ $n$ -Tupel“ und „Koordinaten eines Pfeils“:

*Um sich ein bisschen Arbeit zu ersparen, kann man gleichwertige Rechengänge zu einem zusammenfassen, indem man die Vorzeichen nur einmal schreibt und die Zahlen in Vektoren (Klammern) untereinander. Es gibt auch Koordinatenvektoren, sie geben die Koordinaten eines Pfeils an.*

Wahrscheinlich nannten die meisten SchülerInnen nur jenen Aspekt, der ihnen am wichtigsten erschien. Möglicherweise glaubten sie auch, dass von ihnen eine exakte

Definition erwartet wird, die ja eindeutig sein muss. Für das Bewusstmachen von Bedeutungen und das Erarbeiten passender Formulierungen ist ein Unterrichtsgespräch sicherlich besser geeignet als ein Stationenbetrieb.

Nun zu den erworbenen Fertigkeiten: Die SchülerInnen können die wesentlichen Grundaufgaben lösen, die sich auf den algebraischen und den geometrischen Aspekt des Vektorbegriffs beziehen. Die in den schriftlichen Dokumentationen auftretenden Fehler unterscheiden sich hier nicht von den im Normalunterricht üblicherweise vorkommenden. Die physikalischen Anwendungen der Vektoraddition und -subtraktion bedürfen aber noch weiterer Erklärung und Übung. (Siehe die im Abschnitt 4.1 geschilderten Beobachtung bei Station 6, die auch durch die Dokumentationen bestätigt wurde.)

Das Hauptaugenmerk des folgenden Mathematikunterrichts galt daher neben der Besprechung von Fehlern in den schriftlichen Dokumentationen einer Reflexion des Vektorbegriffs, den physikalischen Anwendungen so wie einigen für den weiteren Ausbau der Vektorrechnung wichtigen Inhalten der Stationen 13 bis 16 (Zerlegung eines Vektors in Komponenten, Teilungspunkte, Rechengesetze usw.), zu denen in der zur Verfügung stehenden Zeit nur wenige SchülerInnen gekommen waren.

Welche Kenntnisse haben die SchülerInnen aus ihrer Sicht im Stationenbetrieb erworben? Die Antworten reichen von der Angabe einer einzelnen Formel bis zu einer Aufzählung von Lerninhalten aus mehreren Bereichen. Am Beginn der folgenden Auswahl steht die Antwort einer Schülerin, die dieser Unterrichtsform völlig ablehnend gegenüber steht.

*Das kann ich so nicht sagen, denn ich habe mir anhand von Büchern versucht Kenntnisse zu verschaffen.*

*Ein Vektor ist eine gerichtete Größe.  
Pfeil = Endpunkt - Anfangspunkt*

*Jeder Vektor hat einen Gegenvektor.  
Man kann einen Vektor mit jeder rationalen Zahl multiplizieren.  
Aus zwei verschiedenen Vektoren kann man eine Resultierende ausrechnen.*

*Aufstellen von Vektoren  
Darstellen von Kräften und Geschwindigkeiten  
Vektoren auf physikalischem, algebraischem und geometrischem Weg berechnen*

*Rechenzeichen sparen  
bequem ablesen  
Zusammenhänge feststellen*

*Koordinatenvektoren  
Parallelverschiebung, zentrische Streckung  
graphische Darstellung  
Verhältnisse und Vektoren*

*Arbeiten mit Tupeln  
Arbeiten mit Punkten und Pfeilen (Koordinaten berechnen usw.)  
Konstruktionsgänge (z.B. Eigengeschwindigkeit bei Flussüberfahrt)  
Eigenschaften von Pfeilen berechnen (ob sie parallel sind)*

Wie schon bei der Frage nach dem Vektorbegriff zeigt sich, dass die wenigsten SchülerInnen einen systematischen Überblick über ihre Kenntnisse haben. Für das Ordnen und Gliedern so wie das Herstellen von Zusammenhängen im nachfolgenden

den Unterricht war aber die intensive Auseinandersetzung mit den Einzelheiten im Stationenbetrieb eine gute Grundlage.

Der Stationenbetrieb verlangte von den SchülerInnen ein viel höheres Maß an Selbstständigkeit als andere Unterrichtsformen. Sie kamen damit unterschiedlich gut zu recht. Insbesondere die Fähigkeit, Anleitungen und Informationstexte verständnisvoll zu lesen, sowie die Bereitschaft, Lösungswege selber zu finden, waren zu Beginn bei manchen SchülerInnen nur teilweise vorhanden. Durch die Arbeit an den einzelnen Stationen wurden diese Kompetenzen gefördert und deutlich verstärkt. Die Rückmeldungen der SchülerInnen zeigen, dass ihnen trotzdem die Hilfestellung und die Bestätigung durch den Lehrer wichtig sind.

## **5 SCHLUSSBEMERKUNGEN**

Die im vorigen Abschnitt beschriebenen Erfahrungen bieten eine Reihe von Ansatzpunkten für eine Überarbeitung des Stationenbetriebs. Neben einer Verbesserung einzelner Stationen im Hinblick auf Verständlichkeit, Schwierigkeitsgrad und Zeitaufwand scheint mir eine Aufteilung der Stationen auf zwei Blöcke zweckmäßig zu sein. Der erste Block sollte jene Stationen umfassen, in denen die verschiedenen Deutungen des Vektorbegriffs und der Rechenoperationen eingeführt und die Grundaufgaben geübt werden, der zweite die übrigen Stationen. Nach Bearbeitung des ersten Blocks könnten die erworbenen Kenntnisse in einer Phase herkömmlichen Unterrichts zusammengefasst und geordnet werden. Auch die Klärung offen gebliebener Fragen, eine Reflexion des Vektorbegriffs so wie Übungen zur Festigung der Kenntnisse wären in dieser Phase sinnvoll. Danach könnte die Bearbeitung des zweiten Blocks auf gesicherter Grundlage erfolgen.

In einer Klasse, die keine Erfahrung mit eigenständigem Lernen hat, sollten vor der Durchführung eines Stationenbetriebs einige der dort verwendeten Arbeitsformen mit anderen Inhalten geübt werden. Die SchülerInnen sollten auch im Unterricht danach möglichst oft die Gelegenheit haben, die im Stationenbetrieb erworbenen oder verstärkten Kompetenzen anzuwenden.

Man darf nicht verschweigen, dass die Erstellung eines Stationenbetriebs mit einem großen Arbeitsaufwand verbunden ist. Um die Belastung in Grenzen zu halten, sollte die Arbeit auf mehrere LehrerInnen aufgeteilt werden. Die erstellten Stationen sollten gut dokumentiert werden und so beschaffen sein, dass man sie wieder verwenden und an verschiedene Unterrichtssituationen anpassen kann.

Den SchülerInnen war dieser Arbeitsaufwand sehr wohl bewusst. Auch jene, die dem Stationenbetrieb reserviert gegenüber standen, formulierten Kritik in konstruktiver Weise und drückten in den Rückmeldungen ihre Wertschätzung aus.



# ANHANG A: DIE STATIONEN 3 UND 11

## Station 3

|                                |                                                                                                                                                                                       |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Titel</i>                   | Nägel, Gummi, graue Zellen I                                                                                                                                                          |
| <i>Lernziel</i>                | Bei Parallelverschiebungen im Koordinatensystem sollen Beziehungen zwischen Original- und Bildpunkten gefunden werden. An Hand dieser Beziehungen wird die Vektoraddition eingeführt. |
| <i>Typ</i>                     | Wahlpflichtstation, als Einstieg geeignet                                                                                                                                             |
| <i>Anzahl der SchülerInnen</i> | 2                                                                                                                                                                                     |
| <i>Materialien</i>             | Nagelbrett (siehe unten)<br>Gummiringe: blau (1), rot (1), grün mit Pfeilspitzen (3)                                                                                                  |
| <i>schriftliche Unterlagen</i> | Anleitung, Arbeitsblatt (siehe Folgeseiten)                                                                                                                                           |

**Tabelle 7: Station 3**

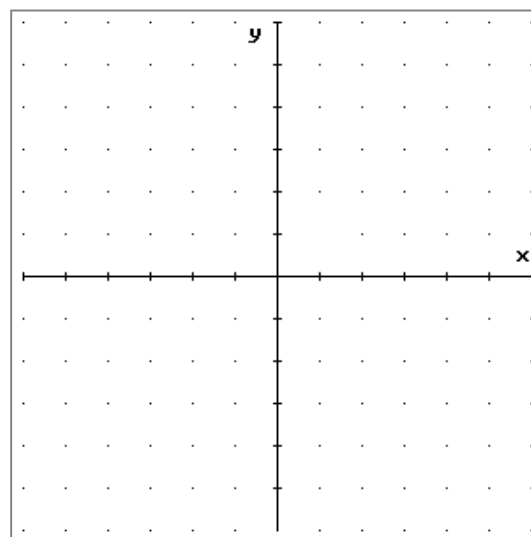
### Nagelbrett:

Holzbrett, ca. 50 x 50 cm<sup>2</sup>;

Nägel im Abstand von 4 cm;

Verschiebbare Achsen:

z.B. gelochte Papierstreifen mit bezeichneten Linien.



**Abbildung 6: Nagelbrett**

## Station 11

|                                |                                                                                                                                                                                                                                       |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Titel</i>                   | Sei sparsam und schnell!                                                                                                                                                                                                              |
| <i>Lernziele</i>               | Die Rechenoperationen für n-Tupel sollen als abgekürzte Schreibweise für mehrere gleichartige Rechenoperationen mit reellen Zahlen eingeführt und auf elementare Aufgaben (Prozentrechnung, Gleichungssysteme usw.) angewandt werden. |
| <i>Typ</i>                     | Pflichtstation, als Einstieg geeignet                                                                                                                                                                                                 |
| <i>Anzahl der SchülerInnen</i> | 2                                                                                                                                                                                                                                     |
| <i>Materialien</i>             | 12 Aufgabekärtchen, Stoppuhr                                                                                                                                                                                                          |
| <i>schriftliche Unterlagen</i> | Anleitung, Informationsblatt (siehe Folgeseiten)                                                                                                                                                                                      |

**Tabelle 8: Station 11**

Es folgen nun die schriftlichen Unterlagen sowie die Kopiervorlagen für die Aufgabekärtchen:

## STATION 3: NÄGEL, GUMMI, GRAUE ZELLEN I

### Anleitung

Ihr braucht ein Nagelbrett und fünf Gummiringe (blau: 1, rot: 1, grün: 3 mit Büroklammern als Pfeilspitzen), außerdem einen wasserlöslichen Faserstift.

1. Auf dem **Nagelbrett**:

- a) Spannt mit dem blauen Ring das **Dreieck ABC** auf:  
 $A = (-2|3)$ ,  $B = (2|4)$ ,  $C = (-1|6)$ .
- b) Spannt mit dem roten Ring das **Dreieck A'B'C'** mit  $A' = (2|-2)$  auf, das durch *Parallelverschiebung* des Dreiecks ABC entsteht.
- c) Verbindet jeden Originalpunkt mit seinem Bildpunkt durch **Pfeile**; verwendet dafür die grünen Gummiringe mit Pfeilspitzen.

2. Füllt das **Arbeitsblatt** mit dem Faserstift aus.

3. Führt die **Aufgabe 1 mit anderen Punkten** durch.

4. **Einzelarbeit**: Dokumentiere die Aufgabe 3 auf kariertem Papier (im Heft / in der Mappe):

- a) Fertige eine beschriftete Zeichnung an.
- b) Führe die zugehörigen Rechnungen mit den Koordinatenvektoren durch.

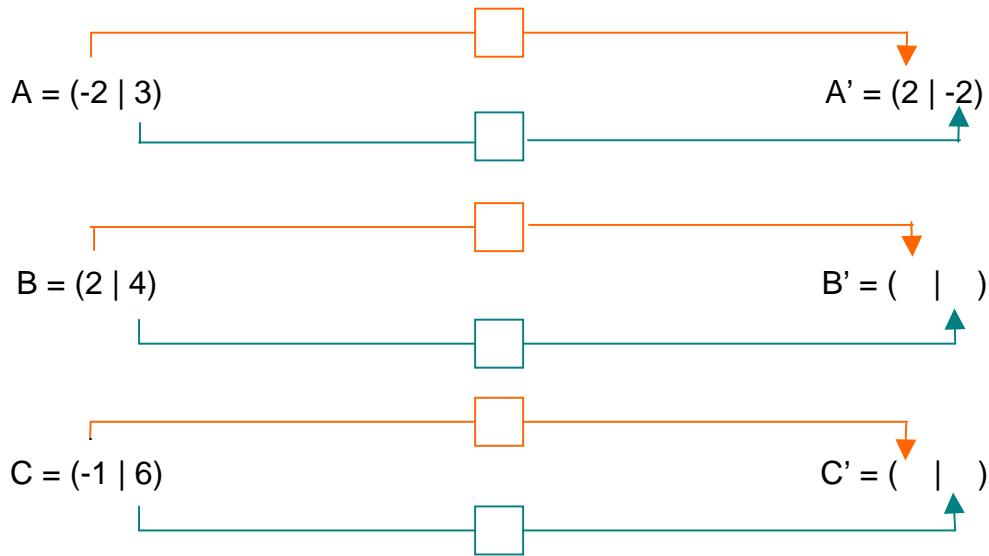
Vergleicht und besprecht eure Arbeiten.

- - - - - *Löscht die Eintragungen auf dem Arbeitsblatt und nehmt die Gummiringe ab!* - - - - -

## STATION 3: NÄGEL, GUMMI, GRAUE ZELLEN I

### Arbeitsblatt

- I. Ergänze:
- die fehlenden Koordinaten der Punkte,
  - die Operatoren (Rechenzeichen mit Zahl) in den Kästchen,
  - den Text.



In Worten: Man erhält die erste Koordinate des Bildpunkts, indem man \_\_\_\_\_ des Originalpunkts \_\_\_\_\_.

(Wie lautet der entsprechende Satz für die zweite Koordinate?)

- II. Die folgende neue Schreibweise ist viel übersichtlicher. Ergänze:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$

Diese Zahlenpaare nennt man auch **Koordinatenvektoren**.

Welche Objekte auf dem Nagelbrett entsprechen den mittleren Koordinatenvektoren?  
Ergänze:

Für eine *Parallelverschiebung* gilt:

$$\text{Originalpunkt} + \underline{\hspace{2cm}} = \text{Bildpunkt}$$

## STATION 11: SEI SPARSAM UND SCHNELL!

### Anleitung

1. Lest das Informationsblatt genau durch.
2. Führt das Spiel aus. (Regeln siehe unten!)  
Tragt die erreichte Punktezahl ins Protokoll ein.
3. Übertragt die Aufgabe ► der ersten Spielrunde in die Mappe und schreibt die zugehörigen Begriffe und Definitionen auf.

### ***Spiel:***

Man benötigt sechs Sparkarten (Runde I), sechs Bonuskarten (Runde II), eine Stoppuhr und Papier zum Schreiben.

#### Runde I:

Die Karten enthalten Aufgaben zum „Einsparen“ von Rechen- und Gleichheitszeichen, die Lösungen stehen auf der Rückseite.

Die Karten werden gemischt.

Ein/e Spieler/in zieht eine Karte und löst die Aufgabe, während der/die andere die dafür benötigte Zeit stoppt.

Für  $z$  eingesparte Zeichen in  $t$  Sekunden erhält man  $10z - t$  Punkte, falls die Antwort richtig ist, sonst 0 Punkte. (Klammern werden nicht gezählt; der Malpunkt wird geschrieben. Die Zahl  $z$  wird übrigens auf der Rückseite angegeben. Minuspunkte gibt es nicht.)

Nun wird so oft gewechselt, bis alle Karten gezogen sind.

#### Runde II:

Die Karten enthalten weitere Aufgaben. Es beginnt, wer in der ersten Runde weniger Punkte erreicht hat (bei Gleichstand, wer in der ersten Runde nicht begonnen hat).

Für die richtige Lösung in  $t$  Sekunden erhält man  $12 - t$  Punkte.

## STATION 11: SEI SPARSAM UND SCHNELL!

### Information

MathematikerInnen sind schreibfaul. Bei mehreren gleichartigen Rechnungen (Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen mit gleichem Multiplikator) schreiben sie das Rechenzeichen und das Gleichheitszeichen nur ein Mal.

#### Beispiel:

Im Ausverkauf werden die Preise um 15 % gesenkt. Berechne die reduzierten Preise, wenn die bisherigen Preise gegeben sind: 24 €, 50 €, 4 €, 132 €.

$$\begin{array}{rclcl} 24 & - & 0,15 & \cdot & 24 & = & 22,2 \\ 50 & - & 0,15 & \cdot & 50 & = & 42,5 \\ 4 & - & 0,15 & \cdot & 4 & = & 3,4 \\ 132 & - & 0,15 & \cdot & 132 & = & 112,2 \end{array} \quad \text{wird zu} \quad \begin{pmatrix} 24 \\ 50 \\ 4 \\ 132 \end{pmatrix} - 0,15 \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 50 \\ 4 \\ 132 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22,2 \\ 42,5 \\ 3,4 \\ 112,2 \end{pmatrix}$$

#### Definitionen:

Fasst man 2, 3, 4, 5, n reelle Zahlen *unter Berücksichtigung der Reihenfolge* zusammen, so entsteht ein **geordnetes Paar**, **Tripel**, **Quadrupel**, **Quintupel**, **n-Tupel** reeller Zahlen.

Schreibweise eines n-Tupels:  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  oder  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Die Menge aller Paare, Tripel, ..., n-Tupel reeller Zahlen wird mit  $\blacktriangleright^2, \blacktriangleright^3, \dots, \blacktriangleright^n$  bezeichnet. (Sprich: R-zwei, R-drei, ..., R-n).

**Addition und Subtraktion:**

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

**Multiplikation mit einer reellen Zahl:**

$$r \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \\ \vdots \\ ra_n \end{pmatrix}$$

Rechnet man auf diese Art mit den n-Tupeln, so bezeichnet man sie auch als **Vektoren**.

## STATION 11: SEI SPARSAM UND SCHNELL!

### Sparkarten

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |    |    |    |    |       |     |    |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|----|----|----|-------|-----|----|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| <p>► SPAREN</p> <p>Schreibe das Gleichungssystem mit möglichst wenigen Rechen- und Gleichheitszeichen:</p> $\begin{cases} 4 \cdot x + 5 \cdot y = -10 \\ 9 \cdot x - 3 \cdot y = 8 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                 | <p>► SPAREN</p> <p>Es werden die mittleren Verkaufszahlen von zwei Getränkemarken in drei Geschäften berechnet. Spare möglichst viele Zeichen ein!</p> <table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr><tr><td>Pipsi</td><td>120</td><td>55</td><td>82</td></tr><tr><td>Yellow Cow</td><td>84</td><td>21</td><td>60</td></tr></table> $\frac{120 + 55 + 82}{3} = 85 \frac{2}{3}$ $\frac{84 + 21 + 60}{3} = 55$ |    | A  | B  | C  | Pipsi | 120 | 55 | 82 | Yellow Cow                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 84 | 21 | 60 |    |    |    |    |    |    |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | A                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | B  | C  |    |    |       |     |    |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Pipsi                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 120                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 55 | 82 |    |    |       |     |    |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Yellow Cow                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 84                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 21 | 60 |    |    |       |     |    |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <p>► SPAREN</p> <p>Aus gegebenen Nettopreisen werden die Preise inklusive 20% MWSt. berechnet. Sei schreibfaul und schnell!</p> $90 + 20\% \cdot 90 = 108$ $350 + 20\% \cdot 350 = 420$ $47 + 20\% \cdot 47 = 56,40$                                                                                                                                                                            | <p>► SPAREN</p> <p>Zu vier gegebenen Preisen <math>p_i</math> inklusive 20 % MWSt. werden die Nettopreise <math>n_i</math> berechnet. Sei sparsam mit den Zeichen!</p> $p_1 \cdot \frac{100}{120} = n_1$ $p_2 \cdot \frac{100}{120} = n_2$ $p_3 \cdot \frac{100}{120} = n_3$ $p_4 \cdot \frac{100}{120} = n_4$                                                                                                        |    |    |    |    |       |     |    |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| <p>► SPAREN</p> <p>Im magischen Quadrat werden die Summen der Spalten berechnet. Verwende möglichst wenige Zeichen!</p> <table><tr><td>-5</td><td>-1</td><td>16</td></tr><tr><td>18</td><td>-3</td><td>-5</td></tr><tr><td>-3</td><td>14</td><td>-1</td></tr></table> $-5 + 18 - 3 = \underline{\hspace{1cm}}$ $-1 - 3 + 14 = \underline{\hspace{1cm}}$ $16 - 5 - 1 = \underline{\hspace{1cm}}$ | -5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | -1 | 16 | 18 | -3 | -5    | -3  | 14 | -1 | <p>► SPAREN</p> <p>Im magischen Quadrat werden die Summen der Zeilen berechnet. Verwende möglichst wenige Zeichen!</p> <table><tr><td>-5</td><td>-1</td><td>16</td></tr><tr><td>18</td><td>-3</td><td>-5</td></tr><tr><td>-3</td><td>14</td><td>-1</td></tr></table> $-5 - 1 + 16 = \underline{\hspace{1cm}}$ $18 - 3 - 5 = \underline{\hspace{1cm}}$ $-3 + 14 - 1 = \underline{\hspace{1cm}}$ | -5 | -1 | 16 | 18 | -3 | -5 | -3 | 14 | -1 |
| -5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | -1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 16 |    |    |    |       |     |    |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 18                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | -3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | -5 |    |    |    |       |     |    |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| -3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 14                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | -1 |    |    |    |       |     |    |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| -5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | -1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 16 |    |    |    |       |     |    |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 18                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | -3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | -5 |    |    |    |       |     |    |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| -3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 14                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | -1 |    |    |    |       |     |    |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

## STATION 11: SEI SPARSAM UND SCHNELL

### Sparkarten Rückseite

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>► SPAREN</p> <p><u>Lösung:</u></p> $\frac{1}{3} \left( \begin{pmatrix} 120 \\ 84 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 55 \\ 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 82 \\ 16 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 85\frac{2}{3} \\ 55 \end{pmatrix} \quad \boxed{z=4}$ <p>Die folgende Schreibweise ist nicht üblich, gilt aber hier auch als richtige Lösung:</p> $\frac{\begin{pmatrix} 120 \\ 84 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 55 \\ 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 82 \\ 16 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 85\frac{2}{3} \\ 55 \end{pmatrix}$ | <p>► SPAREN</p> <p><u>1. Lösung:</u></p> $x \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \boxed{z=4}$ <p><u>2. Lösung:</u></p> $\begin{pmatrix} 4 \cdot x \\ 9 \cdot x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \cdot y \\ -3 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \boxed{z=2}$ |
| <p>► SPAREN</p> <p><u>Lösung:</u></p> $\frac{100}{120} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} \quad \boxed{z=6}$ <p>Es ist nicht üblich, den Multiplikator (Bruch) als zweiten Faktor zu schreiben, es gilt aber hier nicht als Fehler.</p>                                                                                                                                                                                                                               | <p>► SPAREN</p> <p><u>1. Lösung:</u></p> $\begin{pmatrix} 90 \\ 350 \\ 47 \end{pmatrix} + 20\% \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 350 \\ 47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 \\ 420 \\ 56,40 \end{pmatrix} \quad \boxed{z=6}$ <p><u>2. Lösung:</u></p> $1,2 \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 350 \\ 47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 \\ 420 \\ 56,40 \end{pmatrix} \quad \boxed{z=7}$                    |
| <p>► SPAREN</p> <p><u>Lösung:</u></p> $\begin{pmatrix} -5 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} \quad \boxed{z=6}$                                                                                                                                                                                                                                                                           | <p>► SPAREN</p> <p><u>Lösung:</u></p> $\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} \quad \boxed{z=6}$                                                                                                                        |

## STATION 11: SEI SPARSAM UND SCHNELL!

### Bonuskarten

|                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>►</p> <p>BONUS</p> <p><math>(a_1, a_2, \dots, a_n)</math> nennt man ein _____.</p>                                                                                                                                                                                       | <p>►</p> <p>BONUS</p> <p>Definiere die Multiplikation eines geordneten Paares mit einer reellen Zahl!</p>                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p>►</p> <p>BONUS</p> <p>Richtig oder falsch?</p> <p><math>(7, 8, 9) = (9, 8, 7)</math></p> <p><math>\{7, 8, 9\} = \{9, 8, 7\}</math></p>                                                                                                                                   | <p>►</p> <p>BONUS</p> <p>Richtig oder falsch?</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}</math></p> <p>b) <math>\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix}</math></p> |
| <p>►</p> <p>BONUS</p> <p>Richtig oder falsch?</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}</math></p> <p>b) <math>\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 + \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \end{pmatrix}</math></p> | <p>►</p> <p>BONUS</p> <p>Die Menge aller geordneten Tripel reeller Zahlen bezeichnet man mit _____.</p>                                                                                                                                                                                                                                          |

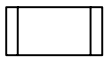


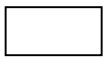
## STATION 11: SEI SPARSAM UND SCHNELL!

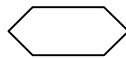
### Bonuskarten Rückseite


|                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>► BONUS</p> <p><u>Lösung:</u></p> <p>z.B.: <math>r \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a \\ r \cdot b \end{pmatrix}</math></p> | <p>► BONUS</p> <p><u>Lösung:</u></p> <p>(geordnetes) n-Tupel</p>                                                                                              |
| <p>► BONUS</p> <p><u>Lösung:</u></p> <p>a) Falsch.</p> <p>Statt „<math>\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}</math>“ müsste „3“ stehen.</p> <p>b) Richtig.</p>      | <p>► BONUS</p> <p><u>Lösung:</u></p> <p>a) Falsch.</p> <p>b) Richtig.</p> <p>Bei einem Tripel ist die Reihenfolge wesentlich, bei einer Menge nicht.</p>      |
| <p>► BONUS</p> <p><u>Lösung:</u></p> <p>►<sup>3</sup></p>                                                                                                          | <p>► BONUS</p> <p><u>Lösung:</u></p> <p>a) Richtig.</p> <p>b) Falsch.</p> <p>Statt „4“ müsste „<math>\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}</math>“ stehen.</p> |

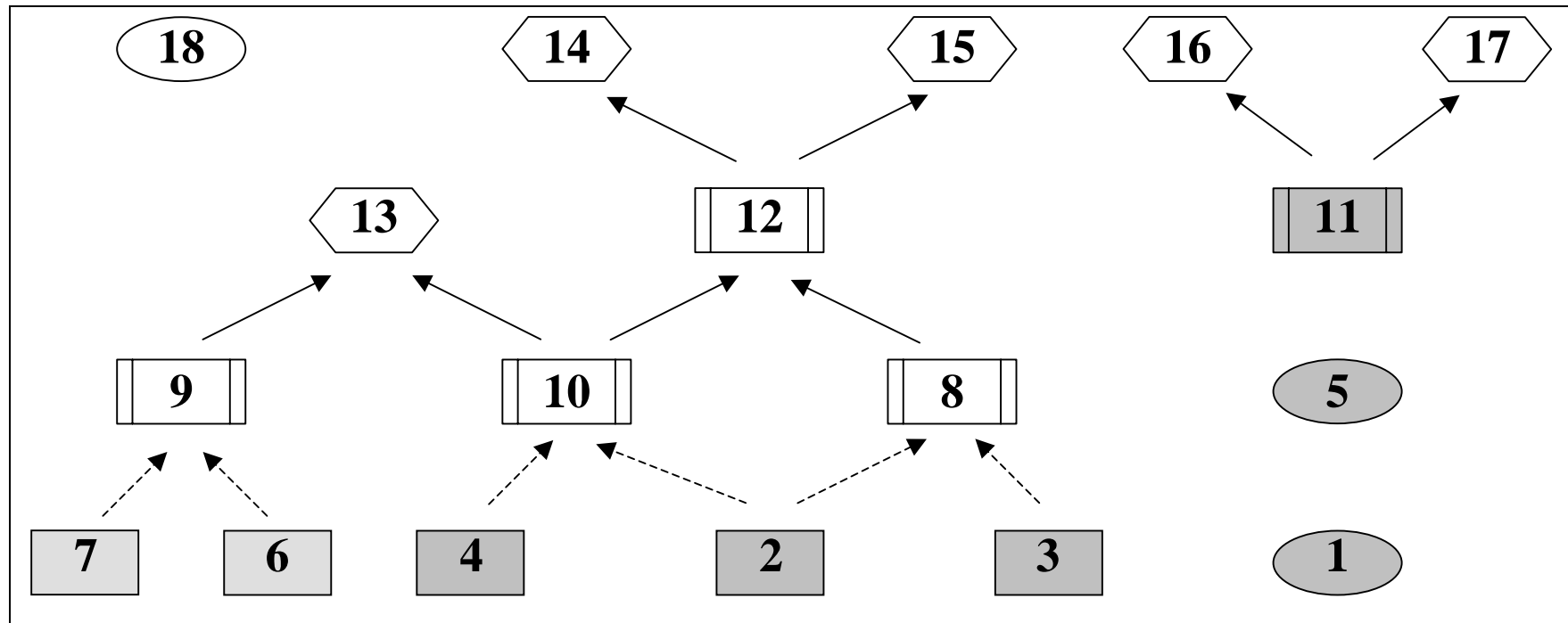
## ANHANG B: WEGE DURCH DEN STATIONENBETRIEB

  
Pflichtstation

  
Wahlpflichtstation (alternativ)

  
Wahlstation mit Bonus

  
Wahlstation



Ein **Start** ist bei jeder „grauen“ Station möglich. Endet bei einer Station ein **normaler Pfeil**, so müssen vorher alle „Vorgängerstationen“ absolviert werden, bei einem **strichlierten Pfeil** eine der Vorgängerstationen. Die Wahlstation links oben setzt alle Pflichtstationen voraus.

# ANHANG C: FRAGEBOGEN

## Fragebogen zum Stationenbetrieb (anonym)

Nimm dir bitte genügend Zeit für die folgenden Fragen. Ehrliche und überlegte Antworten sind wichtige Beiträge für eine Bewertung des Stationenbetriebs, aber auch für die Planung des künftigen Mathematikunterrichts.

1. Welche drei Stationen haben dir am besten gefallen und warum?

| <i>Station Nr.</i> | <i>Grund</i> |
|--------------------|--------------|
|                    |              |
|                    |              |
|                    |              |

2. Welche Stationen haben dir weniger bzw. nicht gefallen?

| <i>Station Nr.</i> | <i>Grund</i> |
|--------------------|--------------|
|                    |              |
|                    |              |
|                    |              |

3. Gib mindestens drei Kenntnisse oder Fertigkeiten an, die du beim Stationenbetrieb gelernt hast:

- 
- 
- 

4. Wie würdest du jemandem erklären, was ein Vektor ist?



# ABBILDUNGEN UND TABELLEN

|                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------|----|
| Abbildung 1: Geometrie auf dem Nagelbrett.....                   | 3  |
| Abbildung 2: Gruppenarbeit.....                                  | 3  |
| Abbildung 3: Beliebtheit der Stationen.....                      | 10 |
| Abbildung 4: Zeitaufwand für die Stationen .....                 | 11 |
| Abbildung 5: Schwierigkeitsgrad der Stationen .....              | 11 |
| Abbildung 6: Nagelbrett .....                                    | 17 |
|                                                                  |    |
| Tabelle 1: Urfassung des Stationenbetriebs .....                 | 4  |
| Tabelle 2: Stationenverzeichnis.....                             | 6  |
| Tabelle 3: Skalen für Zeitaufwand und Schwierigkeitsgrad .....   | 11 |
| Tabelle 4: Lernerfolg im Vergleich zum Normalunterricht.....     | 12 |
| Tabelle 5: Vor- und Nachteile des Stationenbetriebs.....         | 13 |
| Tabelle 6: Bereitschaft zu einem weiteren Stationenbetrieb ..... | 13 |
| Tabelle 7: Station 3.....                                        | 17 |
| Tabelle 8: Station 11 .....                                      | 17 |
|                                                                  |    |
| Formular 1: Feedback zu den Stationen.....                       | 8  |

# LITERATUR

BÜRGER, H., FISCHER, R., MALLE, G. u.a.: Mathematik Oberstufe 1. Arbeitsbuch für die 5. Klasse der AHS. 2. Auflage. ÖBV & HPT: Wien 2000.

CEJNEK, Eduard: Zur Einführung der Vektorrechnung in der Schule. In: Vorträge der ÖMG-Lehrerfortbildungstagung am 22.4.1983 in Wien (Didaktikreihe Heft 10). Österreichische Mathematische Gesellschaft: Wien 1983, 47 - 59.

LEUDERS, T.: Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Cornelsen Scriptor: Berlin 2001.

WITTMANN, Erich: Elementargeometrie und Wirklichkeit. Einführung in geometrisches Denken. Vieweg: Braunschweig – Wiesbaden 1987.